УДК 519.254
Код РИНЦ 27.00.00

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРА ВАЛОВОГО ВЫПУСКА МЕТОДОМ ПОЛНЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

© 2020 Иванов Дмитрий Владимирович
доцент
Самарский государственный экономический университет
E-mail: dvi85@list.ru

Ключевые слова: межотраслевой баланс, метод полных наименьших квадратов, вектор валового выпуска, матрица прямых затрат, ошибки в переменных, вектор конечного потребления, плохая обусловленность.

В статье предлагается оценивание вектора валового выпуска при наличии ошибок в матрице прямых затрат и вектора конечного потребления. Предложено использование метода полных наименьших квадратов оценивания вектора валового выпуска. Тестовые примеры показали, что точность предложенных оценок вектора валового выпуска выше точности оценок, получаемых с помощью классического метода наименьших квадратов (МНК).

Модели межотраслевого баланса в экономике находят широкое применение[1,2]. Одной из основных задач, решаемых с помощью межотраслевого баланса является оценивание вектора валового выпуска продукции. Данная задача относится к обратным задачам. Обратные задачи с большим числом переменных часто бывают плохо обусловленными. Решение плохо обусловленных задач приводит к большим погрешностям в решении даже при малых ошибках в исходных данных.

В связи с этим задача нахождения вектора валового выпуска по неточным данным является актуальной.

В матричной форме уравнения межотраслевого баланса имеют вид:

$$X=A\times X+Y \qquad 1$$

$$\text{где } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; Y=y\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

X - вектор валового продукта;

Y - вектор конечного продукта;

A - матрица прямых затрат.

Уравнение (1) называется уравнением линейного межотраслевого баланса.

Одной из основных задач межотраслевого баланса является отыскание вектора валового продукта X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y

Проведем эквивалентные преобразования (1)

$$X-A\cdot X=Y \Rightarrow (I-A)\cdot X=Y, \qquad (2)$$

где I- единичная матрица n-го порядка.

Для невырожденной матрицы $(I-A)$, уравнение (2) имеет единственное решение:

$$X=(I-A)^{-1}Y\cdot \qquad (3)$$

Для реальных экономических задач матрица прямых затрат, а также вектор конечного продукта неизвестны, а известны их лишь их оценки. Кроме того, оценки этих параметров, полученные по различным методикам подсчета, могут отличаться. Для оценки вектора валового выпуска необходимо решать переопределенную систему линейных уравнений с ошибками в правой и левой части.

Требуется найти псевдорешение системы

$$(I-\tilde{A})X=\tilde{Y}, \qquad (4)$$

$$\text{где } C\in R^{m\times n}, m\geq n, rank(I-A)=rank((I-A), Y)=n, Y\in R^{m},$$

по приближенным значениям

$$I-\tilde{A}=I-(A+\Delta A), \tilde{Y}=Y+\Delta Y.$$

Задача (4) может быть решена полным методом наименьших квадратов. Задача сводится к нахождению вектора[3]

$$X^{\in}=\min_{X\in R^{n}}\frac{\left\|\tilde{Y}-(I-\tilde{A})X\right\|_2^2}{1+\left\|X\right\|_2^2} \qquad (5)$$

Существует несколько подходов к минимизации (5). Наиболее распространен подход, основанный на вычислении минимального сингулярного числа расширенной матрицы $((I-\tilde{A}), \tilde{Y})$ и соответствующего ему правого сингулярного вектора.

Проблема поиска сингулярного вектора является нелинейной векторной задачей. Ее численное решение сопряжено со значительными трудностями, такими как большая вычислительная сложность, возможной расходимостью алгоритма, а так же его устойчивостью.

Второй подход основан на решении смещенной нормальной системы. Показано[4], что если выполняется условие

$$\sigma=\sigma_{min}((I-\tilde{A}), \tilde{Y})<\sigma_{min}(I-\tilde{A}) \qquad (6)$$

решение задачи (4) может быть получено из смещенной нормальной системы уравнений

$$\left((I-\tilde{A})^{T}(I-\tilde{A})-\sigma^{2}I\right)X=(I-\tilde{A})^{T}\tilde{Y} \qquad (7)$$

Оценки вектора валового выпуска осуществлялась по 4 реализациям системы уравнений (1) методом наименьших квадратов и методом полных наименьших квадратов на основе смещенной системы (7).

Погрешности во входных и выходных данных моделировались прибавлением независимых гауссовски распределенных случайных величин $N(0, 0.03)$. Было осуществлено 50 симуляций.

Результаты оценивания вектора валового выпуска

Метод	Средняя относительная погрешность	Среднеквадратическое отклонение
Метод наименьших квадратов	0.0672	0.0163
Метод полных наименьших квадратов	0.0612	0.0132

В таблице представлены средняя погрешность оценивания вектора валового выпуска и среднеквадратическое отклонение.

---

[1] Эйдельман М. Р. Межотраслевой баланс общественного продукта (Теория и практика его составления). - М.: Статистика, 1966. - 375 с.

[2] Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и - М.: Политиздат, 1990. - 415 с.

[3] Ake Bjõrck. Numerical Methods for Least Squares Problems. - SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 1996. - ISBN 978-0898713602.

[4] А. И. Жданов, "Решение некорректных стохастических линейных алгебраических уравнений регуляризованным методом максимального правдоподобия", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 28(9), 1988. С. 1420-1425.

TOTAL LEAST SQUARES FOR ESTIMATION OF THE GROSS OUTPUT VECTOR

© 2020 Ivanov Dmitriy Vladimirovich
Associate Professor
Samara State University of Economics
E-mail: dvi85@list.ru

Keywords: intersectoral balance, total least squares, the vector of gross output, the matrix of direct costs, errors in variables, the vector of final consumption, ill conditional.

The article proposes the estimation of the gross output vector in the presence of errors in the matrix of direct costs and the final consumption vector. The article suggests the use of the total least squares method for estimating the gross output vector. Test cases showed that the accuracy of the proposed estimates of the gross output vector is higher than the accuracy of the estimates obtained using the classical least squares method (OLS).