

attention should be paid to their use in solving any economic and engineering problems. They, in turn, are used in many areas of the company's activities, for example, when solving certain problems of planning and managing production processes, and long-term planning. In this regard, it is important for students of various fields of higher education to know and understand the application of mathematical methods and the problems that arise.

УДК 51-7  
Код РИНЦ 06.00.00

## ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2020 Нуйкина Елена Юрьевна  
кандидат экономических наук, доцент  
Самарский государственный экономический университет  
E-mail: nuikina1973@mail.ru

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, экономические исследования, математические методы.

Целью данной работы является рассмотрение некоторых приемов базового математического моделирования экономических и социальных процессов. Применение аппарата дифференциальных уравнений дает возможность найти подход к решению многих экономических задач. Автор указывает, что рассмотренный метод математического моделирования дает несколько упрощенный подход к составлению экономико-математической модели. Но в то же время отмечается, что существует множество математических приемов, позволяющих реализовать решение более сложных проблем с многоцелевыми задачами.

Региональные экономические явления и процессы становятся достаточно изученными лишь в том случае, когда наравне с их содержательным анализом удастся выявить количественные характеристики свойственным им объективным закономерностям. Предпосылкой получения возможностей контролировать и прогнозировать развитие экономики в регионах России, давать научно-обоснованные рекомендации, необходимые для составления плана развития региона является возможность применения математических методов в качестве инструмента решения задач экономической, а также демографической динамики.

Экономико-математическое моделирование является одним из наиболее объективных и доступных инструментариев, дающее наиболее реальное представление об анализируемом предмете, определить основные факторы, влияющие на конечный результат, выявить силу их воздействия и имеющиеся взаимосвязи<sup>5</sup>.

Дифференциальные уравнения имеют достаточно широкое применение в задачах с экономическим содержанием.

Пусть  $y(t)$  - объем продукции, выпускаемый отдельной отраслью. Эта продукция реализуется к определенному моменту времени  $t$ . Предположим, что вся продукция, производимая отраслью, реализуется по фиксируемой цене  $p$ .

Тогда доход от реализации к моменту времени  $t$  составит:

$$I t = p y t \cdot 1$$

Обозначим через  $K(t)$  величину инвестиций, направленных на реорганизацию производства. В экономической модели естественного роста принято считать, что скорость выпуска продукции прямо пропорциональны величине инвестиций<sup>3</sup>:

$$\frac{dy}{dt} = lK(t), \quad 2$$

где предельная производительность капитала, показывающая изменение объема выпуска с увеличением использования капитала на единицу.

Величина инвестиций  $K(t)$  составляет зафиксированную часть дохода. Тогда получим

$$K(t) = ml(t) = mpy(t), \quad 3$$

где  $l$  - коэффициент пропорциональности  $m$ , называемый нормой прибыли инвестиций. Этот показатель является нормируемой величиной, позволяющий оценить прибыльность инвестиций, который может быть вычислен по формуле:

$$m = \frac{\text{Выручка-расходы}}{\text{Инвестиции}}$$

Подставляя выражение (3) для  $K(t)$  в (2), получим

$$\frac{dy}{dt} = lmpy \quad 4$$

Обозначим  $z = mpl$ .

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = zy \quad 5$$

Получили уравнение, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, имеем:

$$dy = zydt \Rightarrow \frac{dy}{y} = zdt.$$

После интегрирования обеих частей последнего равенства находим

$$\ln|y| = zt + \ln|C|.$$

Или

$$y(t) = Ce^{zt}, \quad 6$$

где  $C$  - постоянное число, которое определяется начальными условиями, такими например, как продажа продукции в конкретный момент времени.

Уравнение (5) называется уравнением естественного роста. Впервые его получил швейцарский математик Якоб Бернулли.

Это уравнение может быть применено всякий раз, когда скорость изменения некоторой величины  $y(t)$  пропорциональна ее значению в данный момент времени  $t$  при постоянном темпе роста<sup>4</sup>.

Дифференциальное уравнение естественного роста было предложено английским экономистом Мальтусом для описания изменения численности народонаселения. То есть уравнение (5) может применяться для изучения демографических процессов.

Например, имеются статистические данные определенного региона по количеству родившихся и количеству умерших. Также известно, что значения этих индикаторов в единицу времени прямо пропорциональны общей численности населения региона с коэффициентами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Решается задача, которая должна выявить закономерности изменения численности населения в течение определенного времени.

Обозначим:

$N = N(t)$  - общее число жителей региона в определенный момент времени  $t$ .

Прирост населения  $\Delta N$  за время  $\Delta t$  равен разности числа родившихся и числа умерших за это время:

$$\Delta N = r_1 N \Delta t - r_2 N \Delta t.$$

Разделим обе части последнего равенства на  $\Delta t$ , получим

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (r_1 - r_2) N$$

Перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (r_1 - r_2) N$$

Или

$$N' = rN, \tag{7}$$

где  $r = r_1 - r_2$

$$dN = rN dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = r dt.$$

После интегрирования обеих частей последнего равенства находим:

$$\ln|N| = rt + \ln|C|.$$

Таким образом, получена математическая модель демографического процесса:

$$N = Ce^{rt} \tag{8}$$

В качестве постоянной величины  $C$  в данном случае можно определить условия, задаваемые, например, численностью населения в начальный момент времени<sup>2</sup>.

Рассмотренный метод математического моделирования дает несколько упрощенный подход к составлению экономико-математической модели, так как здесь не учитывается время между окончанием производства продукции и ее реализацией, то есть считаем, что временной лаг равен нулю. Любая модель описывает достаточно сглаженные ситуации, но тем не менее математическое моделирование предоставляет спектр возможностей и получаемые результаты могут и должны являться дополнительными аргументами в пользу принимаемых решений<sup>1</sup>. Существует множество математических приемов, позволяющих реализовать решение более сложных проблем с многоцелевыми задачами.

Исследователь должен понимать и чувствовать, что применение математических методов в динамике экономических процессов состоит не только в правильном подборе формул и подстановке туда нужных значений<sup>5</sup>. Необходим творческий подход к задаче и прежде, чем решить проблему, целесообразно подумать, что делать с ее решением.

<sup>1</sup> Жак С.В. Является ли математика аргументом в экономике? // TERRAECONOMICUS. - 2003. Т. 1. № 3. - С. 95-97.

<sup>2</sup> Математика для экономистов. Задачник: учебно-практическое пособие / Р.И. Горбунова М.В. Курганова С.И. Макаров.М.В. Мищенко, Е.Ю. [и др.]; под ред. С.И. Макарова, М.В. Мищенко. - Москва: Кнорус, 2018. - 358 с. - ISBN: 978-5-406-06423-8.

<sup>3</sup> Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Экономическая модель естественного роста с динамической памятью // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. - 2017. - № 4-2. - С. 51-58.

<sup>4</sup> Tarasova V.V., Tarasov V.E. Economic interpretation of fractional derivatives // *Progress in Fractional Differentiation and Applications*. - 2017. - Vol. 3. - No. 1. - P. 1-7. DOI: 10.18576/pfda/030101

<sup>5</sup> Экономика. Социология. Менеджмент: федер. образоват. портал / Высш. шк. экономики. - Москва, 2003-. - URL: <http://ecsocman.hse.ru/> (дата обращения 05.03.2020)

## APPLICATION OF THE APPARATUS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MODELING OF ECONOMIC PROCESSES

© 2020 Nyikina Elena Yuryevna  
Candidate of Sciences in Economics, Associate Professor  
Samara State University of Economics  
E-mail: nuikina1973@mail.ru

**Keywords:** differential equations, economic studies, mathematical methods.

The aim of this work is to consider some of the techniques of basic mathematical modeling of economic and social processes. The application of the apparatus of differential equations makes it possible to find an approach to solving many economic problems. The author indicates that the considered method of mathematical modeling gives a somewhat simplified approach to the compilation of an economic-mathematical model. But at the same time, it is noted that there are many mathematical techniques that allow us to solve more complex problems with multi-purpose problems.

УДК 517.956.3  
Код РИНЦ 27.00.00

## ЗАДАЧА S5 ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2020 Родионова Ирина Николаевна  
доцент  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева  
© 2020 Севастьянова Светлана Александровна  
доцент  
Самарский государственный экономический университет  
E-mail: s\_sevastyanova@mail.ru

**Ключевые слова:** уравнение гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнение.

В статье приведен метод решения краевой для полного уравнения гиперболического типа третьего порядка с переменными коэффициентами. За основу решения поставленной задачи взя-